Lycée Laymoun
Leçon : **Fonctions logarithmes**

2ème BAC Pro
2019 - 2020

Prof : YAZOUGH MOHAMED

1ère Partie : logarithme népérien

① Définition :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

→ Autrement dit :

- ln définie et continue sur $]0,+\infty[$
- ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et : $\forall x>0 \quad \ln'(x)=\frac{1}{x}$.
- $\ln(1)=0$

② Propriété fondamentale :

$(\forall a>0)(\forall b>0) : \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

③ Conséquence : $(\forall a>0)(\forall b>0)$;

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

$$(\forall r\in\mathbb{Q}) ; \ln(a^r)=r\ln(a)$$

④ Remarque : on a pour tout $r\in\mathbb{Q}$ et $x>0$: $\sqrt[r]{x}=x^{\frac{1}{r}}$

par exple : $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

→ Donc : $\ln(\sqrt[3]{x})=\ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\ln(x)$

et : $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$

EX : 1 Sachant que : $\begin{cases}\ln(2)\simeq 0,7\\ \ln(3)\simeq 1,1\end{cases}$

calculer : $\ln\left(\frac{8}{12}\right)$ et $\ln(72)$

E : 2 Simplifier les expressions :

$A=\ln(a^8)+\ln(a^4)-\ln\left(\frac{1}{a^8}\right)$ $(a>0)$

$B=\ln(ab)+\ln\left(\frac{a}{b}\right)-\ln(a^2)$; $(a>0 ; b>0)$

EX : 3 Determiner le domaine de déf de :

1° $f(x)=\ln(x-8)$;

2° $g(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

3° $h(x)=x^3-\frac{1}{x}\ln(x^2-1)$

⑤ Limites aux bornes de $D_{\ln}$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$

⑥ Tableau de variation de ln :

ln est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\forall x>0 \quad \ln'(x)=\frac{1}{x}>0$ donc

ln est str ↗ sur $]0,+\infty[$

ainsi :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$		+	
ln	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

⑦ Le nombre népérien : e.

e est le nombre réel qui vérifie : $\ln(e)=1$ et on a : $e\simeq 2,7$

⑧ Propriétés algébriques :

Comme ln est str ↗ ; alors :

$(\forall a>0)(\forall b>0)$ on a :

$$\begin{cases} \ln(a)=\ln(b) \iff a=b \\ \ln(a)>\ln(b) \iff a>b \\ \ln(a)<\ln(b) \iff a<b \end{cases}$$

EX : 4| Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°/ $\ln(x)=1$ 2°/ $\ln x = 7$

3°/ $\ln(x^2) = \ln(6x-5)$

4°/ $\ln(x-1) = \ln(2x+3)$

EX : 5| Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°/ $\ln(-x+4) < \ln(x)$

2°/ $\ln(x+2)+\ln(x-5) < 3\ln(2)$

3°/ $\ln(-2x+3) < 2\ln(x)$

EX : 6| Résoudre dans $\mathbb{R}$

$\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 = 0$

$\ln^2(x) = \ln(x)$

⑨ Représentation graphique :

prop : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

L'éq de la tangente au pt : $(1;0)$:

$T : y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$

$y = x-1$

⑩ Limites à retenir :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x\ln x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

EX : 7| Calculer les limites :

1 $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - 5\ln x)$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - \ln x)$

3 $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x^2) - \ln x)$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\ln(x^4)}{x-1}\right)$

5 $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x+1) + \ln x)$

6 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

⑪ Dérivée logarithmique d'1 fct :

Si u est une fct dérivable et strictement positive sur un intervalle I

La fct $\ln u$ est dérivable sur I

et $\forall x\in I$ $\ln'(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

EX : 8| calculer les dérivées de :

1°/ $\ln(x^2+5)$ $I=\mathbb{R}$

2°/ $\ln(x^3+x)$; $I=]0;+\infty[$

3°/ $\ln(x^2-4)$; $I=]2;+\infty[$

4°/ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$; $I=]-\infty;-2[$

Fonctions logarithmes :

2ème Partie . 2ème BacPro

(12) La fct logarithme de base a.

(avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$)

Déf : c'est la fct notée : $\log_a$

tq : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier :

la fct $\log_{10}$ est la fct logarithme décimal et on la note : log.

Propriétés : • $\log_a(1) = 0$; $\log_a(a) = 1$

• $\forall x > 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

• $\forall x > 0 \ \forall y > 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(13) Limites et inégalités :

si $a > 1$ on a : $\forall (x;y) \in]0,+\infty[^2$

$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

Si $0 < a < 1$

$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

(14) La dérivée :

$\forall x \in]0,+\infty[$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$

Exercices

Ex : 9

$f(x) = \ln(5-2x) + \ln(2)$

1) Donner D_f et calculer $f'(2)$.
2) Donner l'éq de la tangt au pt : $(2; f(2))$

Ex : 10 f déf sur $]-3,+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x+3) - x^2 + 1$

Donner l'éq de la tgt au pt $(-1; f(-1))$

Ex : 11 Etudier les variations de la fct f sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = \ln(2x-8)$; $I =]4, +\infty[$

b) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$; $I =]1,+\infty[$

c) $f(x) = x^2 - 4 + \ln(x-2)$; $I =]2,+\infty[$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \ln(1-2x)$; $I =]-\infty; \frac{1}{2}[$

Ex : 12 **A** $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln(x)$; $x \in]0,+\infty[$

1) calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2) Dresser le tableau de variation de g.
3) calculer $g(1)$ et donner le signe de $g(x)$: $(x \in]0,+\infty[)$

B $\forall x \in]0,+\infty[$: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$

1) Déterminer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{0^+} f$
2) Mq : (D) : $y = x - 1$ est asymptote.
3) Mq : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
4) Dresser le tableau de var de f
5) Calculer les coordonnées du pt de l'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.
6) Trasser $(\mathcal{C}_f)$. on donne : $\|\vec{OI}\| = 3$ cm, $\|\vec{OJ}\| = 2$ cm